

Correction Feuille Exercice 12

Exercice 13 (Bilan)

1. On a

$$P(-2) = (-2)^4 + 2 \times (-2)^3 + (-2)^2 + 2 \times (-2) = 16 + 2 \times (-8) + 4 - 4 = 0$$

Donc

 -2 est une racine de P . On remarque que $Q(1) = 1 + 1 - 2 = 0$ donc

 1 est une racine de Q .

2. En développant l'expression pour le polynôme

$$\begin{aligned} P(X) &= X(X+2)(aX^2 + bX + c) \\ &= (X^2 + 2X)(aX^2 + bX + c) \\ &= aX^4 + bX^3 + cX^2 + 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX \\ &= aX^4 + (b+2a)X^3 + (c+2b)X^2 + 2cX \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 2 \\ c + 2b = 2 \\ c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

On a alors

$P(X) = X(X+2)(X^2+2)$ qui est la factorisation de P .

3.

$$\begin{array}{r|l} X^3 & +X & -2 & X-1 \\ - (X^3 - X^2) & & & \hline X^2 & +X & -2 & X^2 + X + 2 \\ - (X^2 - X) & & & \\ \hline & 2X & -2 & \\ - (2X - 2) & & & \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

 On en déduit que $Q(X) = (X-1)(X^2+X+2)$.
Ceci est bien une factorisation de Q car le discriminant de $X^2 + X + 2$ est négatif (ce polynôme n'a donc pas de racines).

4. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Q(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Pratiquer la division euclidienne

Exercice 14

On divise le polynôme $X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 2X - 5$ par le polynôme $X^2 - 2X + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 2X - 5 & X^2 - 2X + 1 \\
 - (X^4 - 2X^3 + X^2) & \hline
 5X^3 - 5X^2 + 2X - 5 & \\
 - (5X^3 - 10X^2 + 5X) & \\
 \hline
 5X^2 - 3X - 5 & \\
 - (5X^2 - 10X + 5) & \\
 \hline
 7X - 10 &
 \end{array}$$

On en déduit que $X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 2X - 5 = (X^2 - 2X + 1)(X^2 + 5X + 5) + 7X - 10$.

Exercice 15

Soit le polynôme P défini sur \mathbb{R} par $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

1. On a $P(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$ donc 1 est bien une racine de P . On peut alors factoriser P par $X - 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 - 2X^2 - X + 2 & X - 1 \\
 - (X^3 - X^2) & \hline
 -X^2 - X + 2 & \\
 - (-X^2 + X) & \\
 \hline
 -2X + 2 & \\
 - (-2X + 2) & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Donc $P(X) = (X - 1)(X^2 - X - 2)$. Le discriminant de $X^2 - X - 2$ est $\Delta = 9$ donc les solutions de $X^2 - X - 2 = 0$ sont $X_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $X_2 = \frac{1+3}{2} = 2$. Ainsi

$$P(X) = (X - 1)(X + 1)(X - 2).$$

2. On donne le tableau de signe du polynôme P .

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
Signe de $x + 1$	-	0	+	+	+		
Signe de $x - 1$	-	-	0	+	+		
Signe de $x - 2$	-	-	-	0	+		
Signe de $P(X)$	-	0	+	0	-	0	+

Factoriser un polynôme

Exercice 16

On souhaite résoudre l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, (E) : $e^{2x} + 4e^x + 1 - 6e^{-x} = 0$.

1. En faisant le changement de variable $X = e^x$, on obtient

$$\begin{aligned} (E) &\iff X^2 + 4X + 1 - \frac{6}{X} = 0, & X > 0 \\ &\iff X^3 + 4X^2 + X - 6 = 0, & X > 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On note alors } P(X) = X^3 + 4X^2 + X - 6.}$$

2. On calcule $P(1) = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$. Donc

$$\boxed{1 \text{ est une racine de } P.}$$

3. On divise P par $X - 1$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 4X^2 + X - 6 & X - 1 \\ - (X^3 - X^2) & \hline \hline 5X^2 + X - 6 & X^2 + 5X + 6 \\ - (5X^2 - 5X) & \\ \hline 6X - 6 & \\ - (6X - 6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ainsi $P(X) = (X - 1)(X^2 + 5X + 6)$. On étudie le polynôme $X^2 + 5X + 6$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 25 - 24 = 1$. Les racines sont alors

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-5 - 1}{2} & X_2 &= \frac{-5 + 1}{2} \\ &= -3 & &= -2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } P(X) = (X - 1)(X + 3)(X + 2).}$$

4. Les solutions de $P(X) = 0$ sont 1, -2 et -3. Les solutions -2 et -3 ne sont pas acceptables car négatives. L'unique solution de (E) est donc

$$X = 1 \iff e^x = 1 \iff x = 0.$$

$$\boxed{\text{L'unique solution de (E) est } x = 0.}$$

Exercice 17 (*)

1. On remarque que $P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$. 1 est donc une racine évidente de P . On divise donc P par $X - 1$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 2X^2 - 5X + 6 & X - 1 \\ - (X^3 - X^2) & \hline \hline -X^2 - 5X + 6 & X^2 - X - 6 \\ - (-X^2 + X) & \\ \hline -6X + 6 & \\ - (-6X + 6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ainsi $P(X) = (X - 1)(X^2 - X - 6)$. On étudie les racines de $X^2 - X - 6$. Son discriminant est $\Delta = 1 - 4 \times (-6) = 25$. Ce polynôme a donc 2 racines :

$$X_1 = \frac{1 - 5}{2} = -2 \qquad X_2 = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P(X) = (X - 1)(X + 2)(X - 3).}$$

2. Pour trouver le domaine de $x \rightarrow \frac{1}{P(x)}$, on résout $P(x) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } x \rightarrow \frac{1}{P(x)} \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\}}$$

Pour trouver le domaine de $x \rightarrow \ln(x)$, on résout $P(x) > 0$. On trace pour cela le tableau de signe

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$		
Signe de $x + 2$	-	0	+	+	+		
Signe de $x - 1$	-	-	0	+	+		
Signe de $x - 3$	-	-	-	0	+		
Signe de $P(X)$	-	0	+	0	-	0	+

$$\boxed{\text{La fonction } x \rightarrow \ln(x) \text{ est définie sur }] - 2, 1[\cup] 3, +\infty[}$$

3. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} (fonction polynomiale) et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = P(x)$. On détermine ses variations.

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$		
Signe de $P(X)$	-	0	+	0	-	0	+
Variations de f	$+\infty$	$-\frac{41}{3}$	$\frac{25}{12}$	$-\frac{13}{4}$	$+\infty$		

4. Par le changement de variable $X = \ln(x)$,

$$\begin{aligned} (\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0 &\iff X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = 0 \\ &\iff P(X) = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de $P(X) = 0$ sont $X = -2, X = 1$ et $X = 3$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation sont } \mathcal{S} = \{e^{-2}, e, e^3\}.}$$

Exercice 18 (**)

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 possédant 2 racines réelles α_1 et α_2 .

1. La forme factorisée de P est

$$P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

En développant l'expression précédente on obtient

$$P(x) = ax^2 - a(\alpha_1 + \alpha_2)x + a\alpha_1\alpha_2$$

Par identification,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

2. Réciproquement, soient α_1 et α_2 deux nombres réels. Montrer que α_1 et α_2 sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - sx + p$ où $s = \alpha_1 + \alpha_2$ et $p = \alpha_1\alpha_2$. On a

$$\begin{aligned} P(\alpha_1) &= (\alpha_1)^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 \\ &= (\alpha_1)^2 - (\alpha_1)^2 - \alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même avec α_2 :

$$\begin{aligned} P(\alpha_2) &= (\alpha_2)^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 \\ &= (\alpha_2)^2 - (\alpha_2)^2 - \alpha_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ sont les racines de } P.$$

On considère alors l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$

3. On remarque que

$$2 - 5 + 3 = 0$$


Donc

$$1 \text{ est une solution évidente.}$$

4. D'après le résultat précédent,

$$\text{la somme vaut } \frac{5}{2} \text{ et le produit vaut } \frac{3}{2}$$

5. L'autre solution est donc nécessairement $\frac{3}{2}$.

 Utiliser l'identification.

Exercice 19

1. On met toutes les fractions au même dénominateur

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} \\ \iff \frac{1}{x(x+1)(x+2)} &= \frac{a(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)} + \frac{bx(x+2)}{x(x+1)(x+2)} + \frac{cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)} \\ \iff \frac{1}{x(x+1)(x+2)} &= \frac{ax^2 + 3ax + 2a}{x(x+1)(x+2)} + \frac{bx^2 + 2bx}{x(x+1)(x+2)} + \frac{cx^2 + cx}{x(x+1)(x+2)} \\ \iff \frac{1}{x(x+1)(x+2)} &= \frac{(a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a}{x(x+1)(x+2)} \end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} &\iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b=0 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}.$$

2. On met toutes les fractions au même dénominateur

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2(x-1)} &= \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1} \\ \iff \frac{x+1}{x^2(x-1)} &= \frac{a(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{bx(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{cx^2}{x^2(x-1)} \\ \iff \frac{x+1}{x^2(x-1)} &= \frac{ax-a}{x^2(x-1)} + \frac{bx^2-bx}{x^2(x-1)} + \frac{cx^2}{x^2(x-1)} \\ \iff \frac{x+1}{x^2(x-1)} &= \frac{(b+c)x^2 + (a-b)x - a}{x^2(x-1)} \end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a-b=1 \\ -a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} c=2 \\ b=-2 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

Exercice 20

On se propose de calculer la somme $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$

1. On a $\forall k \geq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1} &\iff \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{(k+1)a}{(k+1)(k-1)} + \frac{(k-1)b}{(k-1)(k+1)} \\ &\iff \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{(a+b)k + a - b}{k^2 - 1} \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On a donc

$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} \\ &= \frac{1}{2 \times (2-1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2 \times 2} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{n+1+n}{2n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\text{On conclut } S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}.$$

Calculer des limites de polynômes

Exercice 21

1. D'après le cours

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$$

2. D'après le cours

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 = -\infty$$

3. D'après le cours

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

4. D'après le cours

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercice 22 (*)

1. On a $2^3 - 2^2 + 2 \times 2 - 8 = 0$ donc le polynôme $X - 2$ divise le polynôme $X^3 - X^2 + 2X - 8$. En posant la division euclidienne on obtient :

$$\begin{array}{r|l} X^3 & -X^2 & +2X & -8 & X-2 \\ - (X^3 & -2X^2) & & & \hline \hline & X^2 & +2X & -8 & \\ - & (X^2 & -2X) & & \\ \hline & & 4X & -8 & \\ & & - & (4X & -8) \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

On a alors $x^3 - x^2 - 2x - 8 = (x - 2)(x^2 + x + 4)$. D'un autre côté, en utilisant une identité remarquable, on a $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ donc

$$\frac{x^3 - x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x^2 + x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x^2 + x + 4}{x + 2}$$

On a alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 4}{x + 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

2. On a $1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 0$ donc le polynôme $X - 1$ divise le polynôme $X^3 + X^2 - X - 1$. En posant la division euclidienne on obtient :

$$\begin{array}{r|l} X^3 & +X^2 & -X & -1 & X-1 \\ - (X^3 & -X^2) & & & \hline \hline & 2X^2 & -X & -1 & \\ - & (2X^2 & -2X) & & \\ \hline & & X & -1 & \\ & & - & (X & -1) \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

On a alors $x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x^2 + 2x + 1)$. D'un autre côté, en utilisant une identité remarquable, on a $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ donc

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + 2x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

On a alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ >}} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ >}} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = +\infty$$

3. On remarque tout d'abord qu'en posant $X = e^x$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 4e^{2x} + 3}{e^x - 1} = \lim_{X \rightarrow 1} \frac{X^3 - 4X^2 + 3}{X - 1}$$

On divise le polynôme $X^3 - 4X^2 + 3$ par le polynôme $X - 1$ et on obtient

$$X^3 - 4X^2 + 3 = (X - 1)(X^2 - 3X - 3)$$

Ainsi,

$$\lim_{X \rightarrow 1} \frac{X^3 - 4X^2 + 3}{X - 1} = \lim_{X \rightarrow 1} \frac{(X - 1)(X^2 - 3X - 3)}{X - 1} = \lim_{X \rightarrow 1} X^2 - 3X - 3 = -5$$

On conclut

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 4e^{2x} + 3}{e^x - 1} = -5}$$

Exercice 23 (**)

On regarde si la fonction f est prolongeable par continuité en 1. Pour cela, on calcule (en remarquant que 1 est une solution de $x^3 - 1 = 0$ et en divisant $x^3 - 1$ par $x - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x^3 - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} &= \frac{3}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= \frac{3(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)} - \frac{2(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)} \\ &= \frac{-2x^2 + x + 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)} \end{aligned}$$

On résout l'équation $-2x^2 + x + 1 = 0$. Le discriminant d'une telle équation est $\Delta = 9$. Les solutions sont 1 et $-1/2$. On a donc

$$-2x^2 + x + 1 = -2(x - 1)(x + 1/2)$$


Ainsi,

$$\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{-2(x - 1)(x + 1/2)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)} = -2 \frac{x + 1/2}{(x^2 + x + 1)(x + 1)}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1} x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1)(x + 1) = 6 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$$

La fonction f est prolongeable par continuité en 1 et l'on pose $f(1) = -\frac{1}{2}$.

 *Propriétés des polynômes.*

Exercice 24 (*)

On a

$$\begin{aligned} P'(x) &= 4(x-2)^3 \\ P''(x) &= 4 \times 3(x-2) = 12(x-2)^2 \\ P^{(3)}(x) &= 4 \times 3 \times 2(x-2) = 24(x-2) \\ P^{(4)}(x) &= 24 \end{aligned}$$

et

$$\boxed{\forall k > 4, P^{(k)}(x) = 0.}$$

Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on va montrer par récurrence que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)(x-a)^{n-k} = A_k^n(x-a)^{n-k}$$

Soit la propriété $\mathcal{P}_k : \{P^{(k)}(x) = A_k^n(x-a)^{n-k}\}$.

Initialisation : On montre que \mathcal{P}_0 est vraie. D'un côté $P^{(0)}(x) = P(x) = (x-a)^n$. D'un autre côté, $A_0^n(x-a)^{n-0} = (x-a)^n$.

Hérédité : On suppose que la proposition \mathcal{P}_k est vraie pour un certain $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a alors

$$P^{(k+1)}(x) = A_k^n \times (n-k)(x-a)^{n-k-1} = A_{k+1}^n(x-a)^{n-(k+1)}$$

La proposition \mathcal{P}_{k+1} est vraie. (\mathcal{P}_k) est héréditaire.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, P^{(k)}(x) = A_k^n(x-a)^{n-k}}$$

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, P^{(n)}(x) = n!$ et donc

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geq n, \forall x \in \mathbb{R}, P^{(k)}(x) = 0}$$

Exercice 25 ()**

Dans cet exercice, on se propose de calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On introduit alors le polynôme. $P(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-p)^{n-k}$.

1. En utilisant le binôme de Newton, la forme factorisée de ce polynôme est

$$\boxed{P(X) = (X+1-p)^n}$$

2. D'un côté, sous sa forme de somme,

$$\begin{aligned} P'(X) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k X^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ P''(X) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) X^{k-2} (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

D'un autre côté, en utilisant la forme factorisée,

$$\begin{aligned} P'(X) &= n(X+1-p)^{n-1} \\ P''(X) &= n(n-1)(X+1-p)^{n-2} \end{aligned}$$

3. On remarque que $S_n = p^2 P''(p)$. Ainsi, on a $S_n = p^2 n(n-1)(p+1-p)^{n-2}$, c'est à dire

$$\boxed{S_n = n(n-1)p^2.}$$

4. On suppose que Y est une variable aléatoire telle que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 P(Y = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (k^2 - k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= E(Y^2) - E(Y) \end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{E(Y^2) = S_n + E(Y) = n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np.}$$

5. On en déduit, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Après simplification, } V(Y) = np(1-p).}$$

Exercice 26 (**)

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation : $X^2 P''(X) - 3X P'(X) + 3P(X) = 0$ d'inconnue P . On commencera par étudier le coefficient dominant.

$P \in \mathbb{R}[X]$. On écrit alors

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k, \quad P'(X) = \sum_{k=1}^n a_k k X^{k-1}, \quad P''(X) = \sum_{k=2}^n a_k k(k-1) X^{k-2}$$

Si P vérifie l'équation, on a

$$\begin{aligned} X^2 P''(X) - 3X P'(X) + 3P(X) &= 0 \\ \iff \sum_{k=2}^n a_k k(k-1) X^k - 3 \sum_{k=1}^n a_k k X^k + 3 \sum_{k=0}^n a_k X^k &= 0 \\ \iff \sum_{k=0}^n (a_k (k(k-1)) - 3ka_k + 3a_k) X^k &= 0 \end{aligned}$$

On a notamment par identification,

$$(n^2 - 4n + 3)a_n = 0 \iff (n^2 - 4n + 3) = 0$$

Le coefficient a_n est non nul car il s'agit du coefficient dominant. On résout l'équation de degré 2. Le discriminant associé est $\Delta = 4$. Ce qui laisse deux possibilités pour n . Soit $n = 1$, soit $n = 3$. Les polynômes solution de l'équation sont donc de degré 1 ou 3.

Cas $n = 1$: Les polynômes s'écrivent $P(X) = aX + b$, $P'(X) = a$ et $P''(X) = 0$.

$$X^2 P''(X) - 3X P'(X) + 3P(X) = 0 \iff -3aX + 3aX + 3b = 0 \iff b = 0$$

Tout polynôme de la forme $P(X) = aX$ est solution de l'équation

Cas $n = 3$: Les polynômes s'écrivent $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $P'(X) = 3aX^2 + 2bX + c$ et $P''(X) = 6aX + 2b$.

$$\begin{aligned} X^2 P''(X) - 3X P'(X) + 3P(X) &= 0 \\ \iff 6aX^3 + 2bX^2 - 9aX^3 - 6bX^2 - 3cX + 3aX^3 + 3bX^2 + 3cX + 3d &= 0 \\ \iff -bX^2 + 3d &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit alors que $b = 0$ et $d = 0$

Tout polynôme de la forme $P(X) = aX^3 + bX$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est solution

On remarque que cette seconde condition englobe la première.

Exercice 27 (*)**

Soit E l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant au moins une racine $\alpha \in \mathbb{R}$ et satisfaisant $P(x+1) = P(x)$.

1. Montrer que si $P \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est une racine de P .
2. Déduire l'ensemble des polynômes de E .